

PREREQUISITI DI MATEMATICA

1. Lettere dell'alfabeto greco ($\alpha, \beta, \gamma, \delta \dots$)
2. Equazioni di primo e secondo grado
3. Proprietà delle potenze
4. Definizione e proprietà dei logaritmi
5. Nozioni di base di geometria:
 - (a) Definizione di angolo piano e angolo solido (gradi, radianti, steradiani)
 - (b) Perimetro e area dei poligoni più comuni (triangolo, rettangolo, parallelogramma...)
 - (c) La lunghezza della circonferenza ($2\pi r$)
 - (d) L'area del cerchio (πr^2)
 - (e) Area della superficie e volume di parallelepipedi e cilindri
 - (f) La superficie della sfera ($4\pi r^2$)
 - (g) Il volume della sfera ($\frac{4}{3}\pi r^3$)
 - (h) Il teorema di Pitagora
 - (i) Trigonometria elementare: seno, coseno e tangente per “risolvere” un triangolo rettangolo (per es. dati ipotenusa e un angolo trovare i cateti...)

6. Il concetto di funzione matematica ($y = f(x)$)

7. Nozioni di base di geometria analitica:

(a) Il piano cartesiano

(b) Rappresentazione grafica di una funzione matematica

i. La retta: $y = ax + b$

ii. La parabola: $y = ax^2 + bx + c$

iii. L'elevamento a potenza: $y = ax^n$

iv. L'iperbole: $y = a/x$

v. La funzione esponenziale: $y = e^{ax}$

vi. La funzione logaritmo: $y = \log x$

vii. Le funzioni trigonometriche: $y = \sin(x)$, $y = \cos(x)$,
 $y = \tan(x)$

viii. Il cerchio: $x^2 + y^2 = r^2$

8. Grafici semi-logaritmici e doppio-logaritmici.

9. Notazione scientifica – per es.

- $376 = 3.76 \times 10^2$
- $376000000000 = 3.76 \times 10^{11}$
- $0.0000376 = 3.76 \times 10^{-5}$
- ...

10. Cifre significative; incertezza (o errore) statistica (casuale) e sistematica.

11. I prefissi (deci, centi, milli, kilo,...)

12. Il concetto di vettore; le componenti di un vettore

13. Le operazioni tra vettori:

- (a) moltiplicazione per una costante
- (b) somma di più vettori (graficamente e usando le componenti)
- (c) prodotto scalare tra due vettori
- (d) prodotto vettoriale tra due vettori

Esercizi:

Misurate il tempo che impiegate per andare da casa all'Università nei prossimi 5 giorni e rappresentatelo in un grafico.

Misurate la vostra temperatura corporea nei prossimi 5 giorni e rappresentatela in un grafico.

Stimate l'accuratezza con cui valutate il tempo di percorrenza e la temperatura.

Definite che cos'è un istogramma e fatene un esempio.

CINEMATICA DEL PUNTO – MOTO RETTILINEO

1. Moto rettilineo uniforme

$$x = x_0 + vt$$

dove x_0 = posizione iniziale, v = velocità, t = tempo trascorso

Questa equazione è equivalente a definire la velocità come:

$$v = \frac{x - x_0}{t}$$

Equivalentemente:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

2. Moto rettilineo uniformemente accelerato

$$v = v_0 + at$$

dove v_0 = velocità iniziale, a = accelerazione

Questa equazione è equivalente a definire l'accelerazione:

$$a = \frac{v - v_0}{t}$$

Equivalentemente:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$x = x_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

Domande:

1. Si disegni il grafico di spazio percorso in funzione del tempo per il moto rettilineo uniforme.
2. Si disegni il grafico di spazio percorso in funzione del tempo per il moto rettilineo uniformemente accelerato.
3. Si disegni il grafico di velocità in funzione del tempo per il moto rettilineo uniforme.
4. Si disegni il grafico di velocità in funzione del tempo per il moto rettilineo uniformemente accelerato.
5. Qual è il significato di una velocità negativa ?
6. Qual è il significato di accelerazione negativa ?
7. Se il tachimetro della vostra auto è sempre nella stessa posizione, state necessariamente viaggiando di moto rettilineo uniforme ?

Come detto la velocità è definita come:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si tratta della cosiddetta velocità *media*.

Nel “limite” in cui Δt diventa molto piccolo (“tende a zero”), si ottiene la velocità *istantanea*.

Analogamente

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

definisce l’accelerazione *media*.

Per $\Delta t \rightarrow 0$, si ottiene l’accelerazione *istantanea*.

Nel “Sistema Internazionale”:

- Lo spazio si misura in metri [m]
- Il tempo si misura in secondi [s]
- La velocità si misura in [m/s]
- L’accelerazione si misura in [m/s²]

Esercizio: Se un’auto si muove a 50 Km/h, quanto vale la velocità in m/s ?

MOTO CIRCOLARE UNIFORME

Un punto si muove su una traiettoria circolare.

La velocità è costante in modulo, ma cambiano direzione e verso, dunque c'è accelerazione !

Si tratta dell'accelerazione centripeta: è diretta verso il centro della circonferenza; il modulo vale:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

Il raggio che collega il centro della traiettoria con il punto in moto “spazza” angoli uguali in tempi uguali:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

dove ω è la “velocità angolare”.

La velocità angolare e quella “periferica” sono collegate:

$$v = \frac{\Delta l}{\Delta t} = \frac{\Delta(r\theta)}{\Delta t} = r \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = r\omega$$

Quindi posso riscrivere l'accelerazione centripeta come:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(\omega r)^2}{r} = \omega^2 r$$

DINAMICA: LE LEGGI DI NEWTON

1. PRIMA LEGGE DI NEWTON:

- (a) Un corpo in quiete rimane in quiete finchè l'applicazione di una "forza" non ne provochi il movimento.
- (b) Un corpo in moto rettilineo uniforme permane nel suo stato finchè non gli venga applicata una "forza"

NB per la definizione di forza, vd. la 2a legge di Newton.
Attenzione ! la 1a legge di Newton è valida solo in alcuni sistemi di riferimento:

VA BENE PER:

- (a) Un osservatore fermo per strada
- (b) Un osservatore su un treno che si muove di moto rettilineo uniforme
- (c) ...

NON VA BENE PER:

- (a) Un osservatore su una giostra che gira
- (b) Un osservatore su un'auto in curva
- (c) Un osservatore su un aereo che decolla
- (d) IN GENERALE per un osservatore in moto accelerato

I sistemi in cui vale la 1a legge di Newton sono detti "inerziali"

2. SECONDA LEGGE DI NEWTON:

$$F_{ris} = ma$$

Applicando una forza a un oggetto se ne modifica lo stato di quiete o moto rettilineo uniforme – dunque lo si accelera (o decelera).

La forza è proporzionale all'accelerazione, che è un vettore. Dunque la forza è un vettore, con direzione e verso che sono quelli dell'accelerazione.

Il coefficiente di proporzionalità tra forza e accelerazione è la “massa”.

[massa] = Kg (massa !)

[F] = Newton = Kg m/s²

Se $a=g=9.8 \text{ m/s}^2$: $F_g = mg$ è la forza peso. Esempio: se una persona ha massa pari a 60 Kg, quanto vale il suo peso ?

$$F_g = mg = 60 \text{ kg } 9.8 \text{ m/s}^2 = 588 \text{ N}$$

(o 60 Kg_{peso}...)

3. TERZA LEGGE DI NEWTON:

Se un oggetto A esercita una forza F_{AB} su un secondo oggetto, quest'ultimo esercita sul primo una forza uguale e contraria, $F_{BA} = -F_{AB}$.

NB Le due forze in questione (quella di “azione” e quella di “reazione”) agiscono su corpi diversi e quindi NON si annullano.

ATTRITO

Forza che si oppone al moto relativo di due oggetti che scivolano l'uno sull'altro.

Materiali diversi offrono diversa forza di attrito.

Sia W la forza che l'oggetto di massa M esercita sulla superficie di appoggio S (per es. la forza peso). La superficie di appoggio, per la terza legge di Newton, reagisce con una forza uguale e contraria: $N = -W$ (la “reazione vincolare”, o la “forza normale” – NB normale = perpendicolare).

1. Attrito “statico”. Supponiamo che il blocco sia inizialmente fermo. Applichiamo una forza T , cercando di metterlo in movimento. Se T non è sufficientemente grande il blocco non si muove: ciò significa che la forza di attrito tra blocco e superficie di appoggio (applicata al blocco) è uguale e contraria a T . La massima forza di attrito (statico) è funzione della forza normale N e dei materiali a contatto.

$$f_s^{\max} = \mu_s N$$

dove μ_s = coefficiente di attrito statico (p. es. $\mu_s = 0.3-1$ per metallo su metallo).

2. Attrito “dinamico”. Se il blocco è già in movimento, la forza necessaria per mantenerlo in movimento (vincendo la forza d’attrito) è minore di $f_s^{\max}$. Si introduce un coefficiente di attrito dinamico (o cinetico) $\mu_c < \mu_s$:

$$f_c = \mu_c N$$

μ_c è quasi indipendente dalla velocità relativa del blocco rispetto alla superficie; dipende invece dai materiali.

L’attrito può essere ridotto mediante l’uso di fluidi lubrificanti (p. es. olio).

Nelle giunzioni articolari il fluido sinoviale funge da lubrificante, con $\mu_s \approx 0.003$.

POTENZA

Potenza = (Lavoro)/(tempo in cui il lavoro è fatto)

$$P = \frac{L}{\Delta t}$$

[P]=J/s=Watt (abbreviato in W)

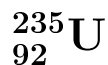
Ricordo: $L = F \cdot \Delta s$

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{F \cdot \Delta s}{\Delta t} = F \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} = F \cdot v$$

$Z = \text{NUMERO ATOMICO} = \text{no. di protoni nel nucleo}$

$A = \text{NUMERO DI MASSA} = (\text{no. di protoni}) + (\text{no. di neutroni}) \text{ nel nucleo}$

Esempio:



UNITA' DI MASSA ATOMICA (UMA) = $(1/12)$ massa di ${}^{12}\text{C}$

$$1 \text{ UMA} = 1.66 \times 10^{-27} \text{ Kg}$$

MASSA ATOMICA = massa di un atomo in unità di UMA

MASSA MOLECOLARE = massa di una molecola in unità di UMA

Esempio: per H_2O , massa molecolare $\simeq 2 + 16 = 18$

GRAMMOMOLECOLA o MOLE di una certa sostanza = una quantità di quella sostanza la cui massa espressa in grammi è numericamente uguale alla massa molecolare espressa in UMA.

$$n = \text{no. moli} = [\text{massa (in g)}] / (\text{massa molecolare in UMA})$$

Esempio: 1 l di $\text{H}_2\text{O} = 1000 \text{ g di H}_2 \Rightarrow n = 1000/18 \simeq 55.5$

$N_A = \text{NUMERO DI AVOGADRO}$: in una mole di una sostanza si trova sempre lo stesso numero di molecole

$$N_A = 6.02 \times 10^{23}$$

Esempio: nel litro d'acqua di cui sopra il numero di molecole è $N = nN_A = 3.3 \times 10^{25}$ molecole.

La temperatura è una misura della energia cinetica media delle molecole:

$$\langle E_c \rangle = \frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} kT$$

m = massa della molecola

$\langle v^2 \rangle$ = valore medio del quadrato della velocità = “velocità quadratica media”

k = costante di Boltzmann = 1.38×10^{-23} J/K

T = temperatura assoluta (in gradi Kelvin)

La pressione che un gas esercita è causata dagli urti delle sue molecole contro le pareti del recipiente, ed è tanto maggiore quanto più grande è la velocità (e quindi l’energia cinetica) delle molecole.

D’altra parte $PV = nRT$, quindi la pressione è proporzionale alla temperatura assoluta.

La conseguenza è che l’energia cinetica è proporzionale alla temperatura assoluta. Ossia, come detto:

$$\langle E_c \rangle = \frac{3}{2} kT$$

DIFFUSIONE

Se si spruzza del profumo in una stanza in cui l'aria è immobile, l'odore si sparge dappertutto.

Gli atomi di elio sono costantemente in moto disordinato e subiscono urti con le molecole d'aria, con gli altri atomi d'elio e con le pareti del recipiente.

Considero la superficie sferica (ideale) tratteggiata: ci sono più atomi di He all'interno che all'esterno $\Rightarrow$ ce ne sono di più che vanno dall'interno all'esterno che viceversa.

NB questo perchè la probabilità di diffondere in una direzione qualsiasi è la stessa per tutte le molecole.

Flusso da zone a maggiore concentrazione verso zone a minore concentrazione = DIFFUSIONE.

Il moto di un atomo di He è completamente casuale (“random walk”): un pò in avanti, un pò indietro, un pò a destra, un pò a sinistra.

La distanza percorsa cresce lentamente col tempo: $l \propto \sqrt{t}$ (NON $l \propto t$!):

$$\langle l^2 \rangle = 2Dt$$

$\langle l^2 \rangle$ = distanza quadratica media

D = coefficiente di diffusione, dipende dal tipo di molecola e dal solvente.

FLUIDI IDEALI

- 1. Privo di attrito interno (= non viscoso).
2. Incomprimibile.
- Si dice stazionario il moto di un fluido in cui la velocità delle particelle è indipendente dal tempo (ma può variare da punto a punto).

Si dice irrotazionale il moto di un fluido in cui non ci sono vortici.

- PORTATA

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} = Sv$$

- EQUAZIONE DI CONTINUITA'

Se il moto è stazionario, la conservazione della materia implica che la portata è costante:

$$Q_1 = Q_2,$$

dove 1,2 si riferiscono a due diverse sezioni di un condotto.

- EQUAZIONE DI BERNOULLI

Se il moto è stazionario e irrotazionale, la conservazione dell'energia meccanica implica:

$$\rho gh_1 + p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho gh_2 + p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

oppure:

$$h_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = h_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g}$$

LIQUIDI REALI VISCOSI

Applicando il principio di conservazione dell'energia meccanica ai liquidi ideali non viscosi si ottiene la legge di Bernoulli.

Nel caso dei liquidi reali (viscosi) parte dell'energia meccanica viene trasformata per effetto della viscosità (= attrito) in calore.

La conseguenza della viscosità è che per mantenere la portata costante in un condotto di raggio R e lunghezza l è necessario applicare una pressione Δp :

$$Q = \frac{\pi \Delta p}{8 \eta l} R^4$$

legge di HAGEN-POISEUILLE, vale per fluidi viscosi in regime laminare.

Si definisce “resistenza idrodinamica”:

$$R = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{8 \eta l}{\pi R^4}$$